# T3. Visión Estereoscópica

## Visión 3D y Movimiento

***Master en "Inteligencia Artificial, Reconocimiento de Formas e Imagen Digital"***

## Índice

# Índice



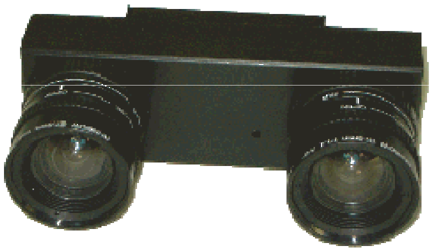


# Introducción

- Proyección de una escena (3D) en 2 o más planos (2D)
  - Sistema binocular
  - Cámara en movimiento
  - Sistema de cámara con espejos
  - Sistema de múltiples cámaras

# Introducción

- Sistema binocular



http://users.rcn.com/mclaughl.dnai/products.htm

http://www.lucs.lu.se/Projects/Robots/Robots1990/StereoHead2.html



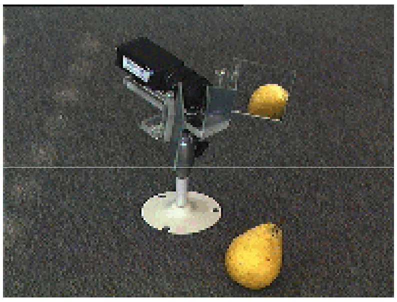
# Introducción

- Cámara en movimiento

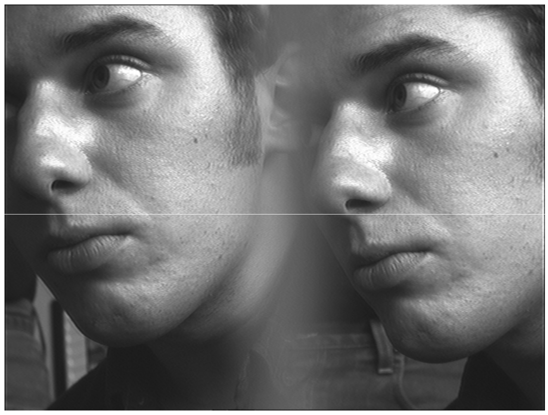
http://www.dis.uniroma1.it/~iocchi/stereo/stereo.html

# Introducción

- Sistema de cámara con espejos



$\Rightarrow$

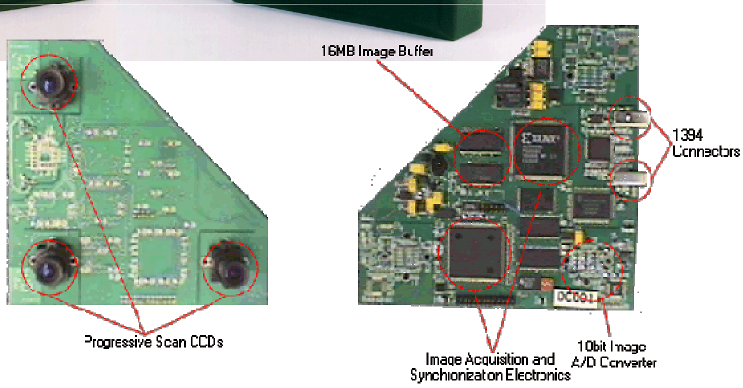


http://www-sop.inria.fr/robotvis/hardware/HardwarePictures.html



# Introducción

- Sistema de múltiples cámaras




http://www.ptgrey.com/products/digiclops

UNIVERSITAT JAUME•I

## Índice

- Introducción
  - ✓ ¿Qué es la visión estereoscópica?
- Geometría de un sistema binocular
  - Geometría de la proyección
  - Geometría binocular. Matriz fundamental
  - Rectificación
- El problema de la correspondencia
  - Restricciones
  - Métodos de correspondencia
    - Métodos basados en áreas
    - Métodos basados en primitivas
  - Mapa de disparidades, oclusiones, consistencia

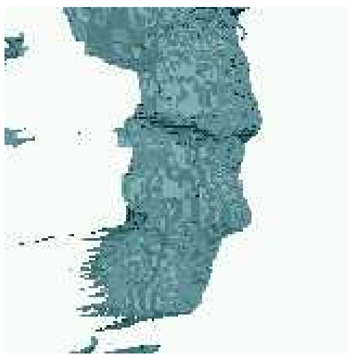


UNIVERSITAT JAUME•I

## ¿Qué es la visión estereoscópica?

- Visión estereoscópica:
  - 2 o más imágenes 2D ⇒ información 3D

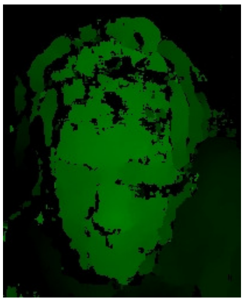
⇒

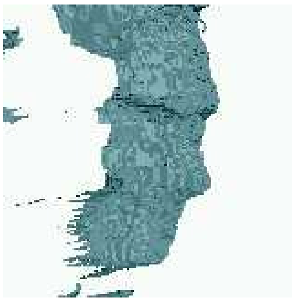


 http://www.ai.sri.com/~konolige/svs/pictures.htm 

## ¿Qué es la visión estereoscópica?

- Visión estereoscópica:
  - 2 o más imágenes 2D ⇒ información 3D

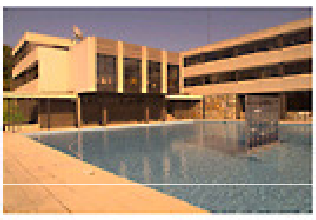


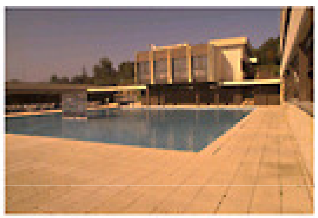


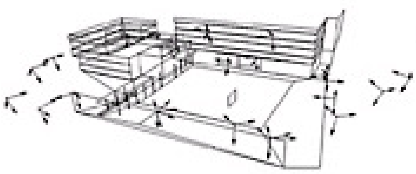
 http://www.ai.sri.com/~konolige/svs/pictures.htm 

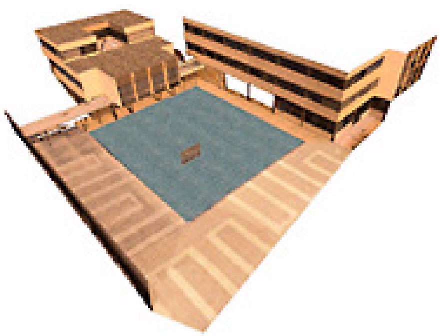
## ¿Qué es la visión estereoscópica?

- Visión estereoscópica:
  - 2 o más imágenes 2D ⇒ información 3D





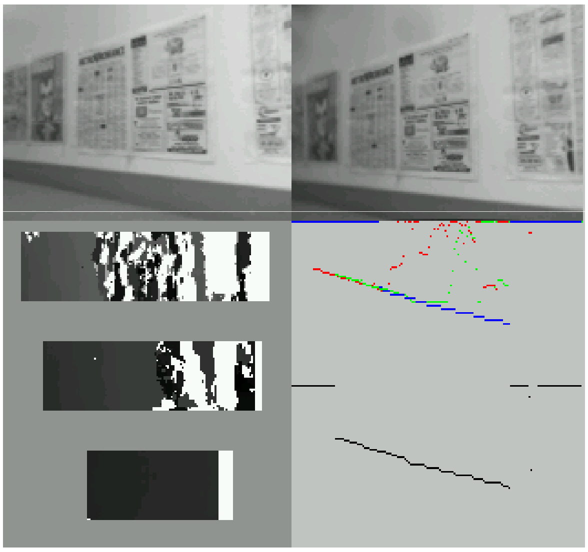




 http://www.inria.fr/ 

# ¿Qué es la visión estereoscópica?

- Visión estereoscópica:
  - 2 o más imágenes 2D ⇒ información 3D



http://www.dis.uniroma1.it/~iocchi/stereo/stereo.html



# ¿Qué es la visión estereoscópica?

- Visión estereoscópica:
  - 2 o más imágenes 2D ⇒ información 3D

http://www.ptgrey.com/products/triclopsSDK/samples.html

UNIVERSITAT JAUME•I

## Índice





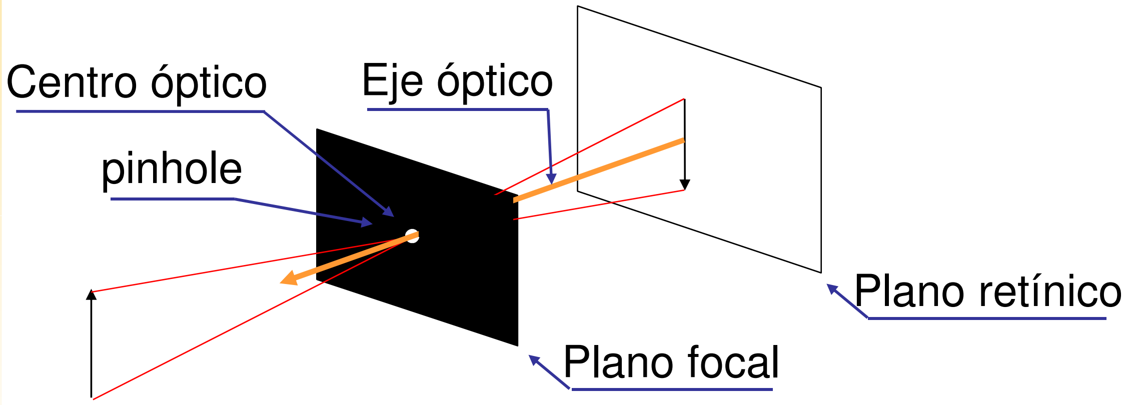
UNIVERSITAT JAUME•I

## Geometría de un Sistema Binocular

- Geometría de 1 cámara:
  - Geometría de la proyección: 3D a 2D
- Geometría de 2 cámaras:
  - Geometría paralela
  - Geometría no paralela
- Calibración
- Rectificación

# Geometría de la proyección

- Modelo de cámara **pinhole**

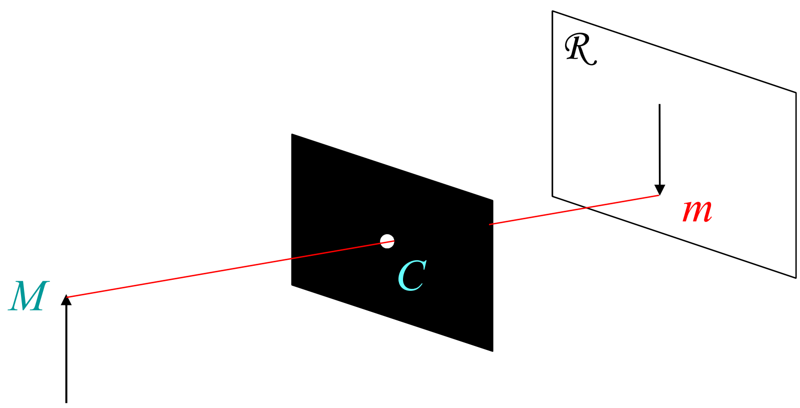



Proyección Perspectiva



# Geometría de la proyección

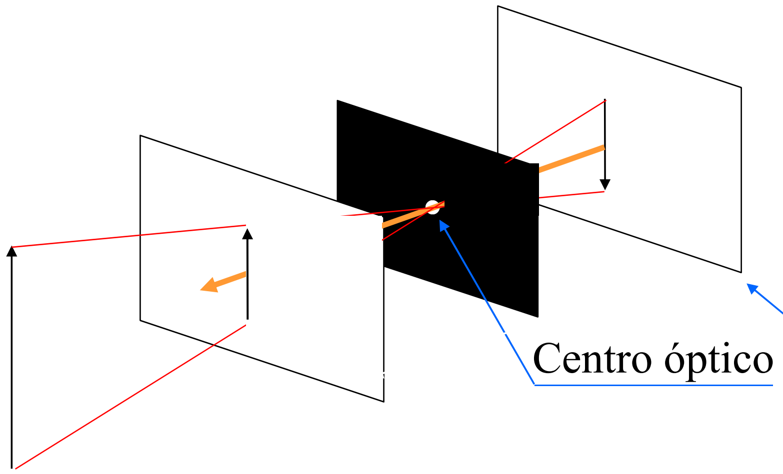
- Modelo de cámara **pinhole**




$m$ = intersección de la recta $CM$ con el plano $\mathcal{R}$

# Geometría de la proyección

- Modelo de cámara **pinhole**

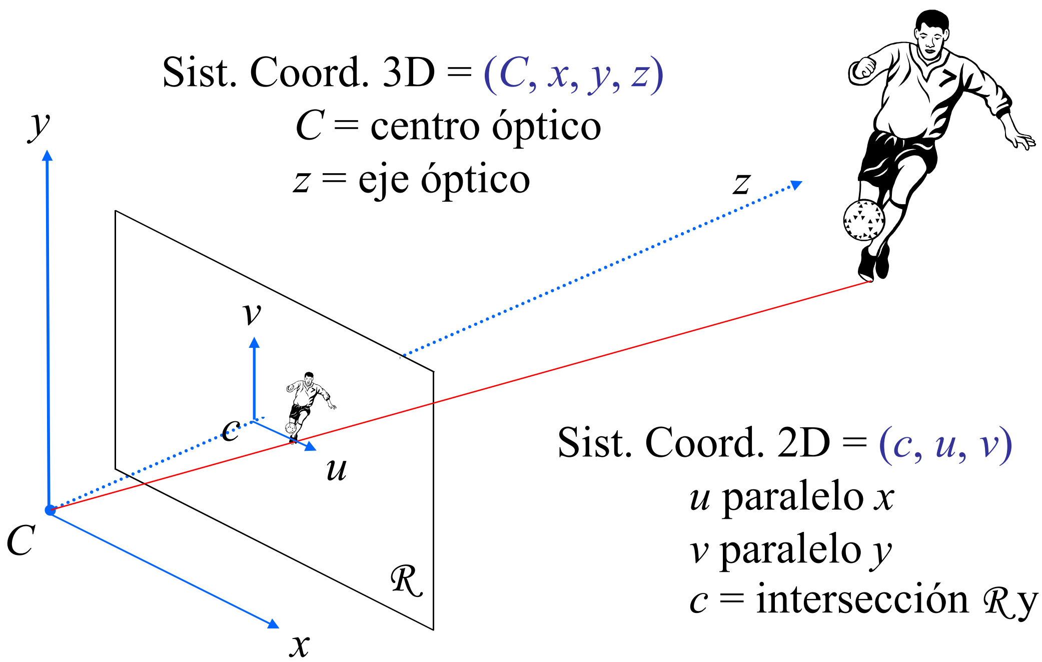





# Geometría de la proyección

- Sistemas de coordenadas

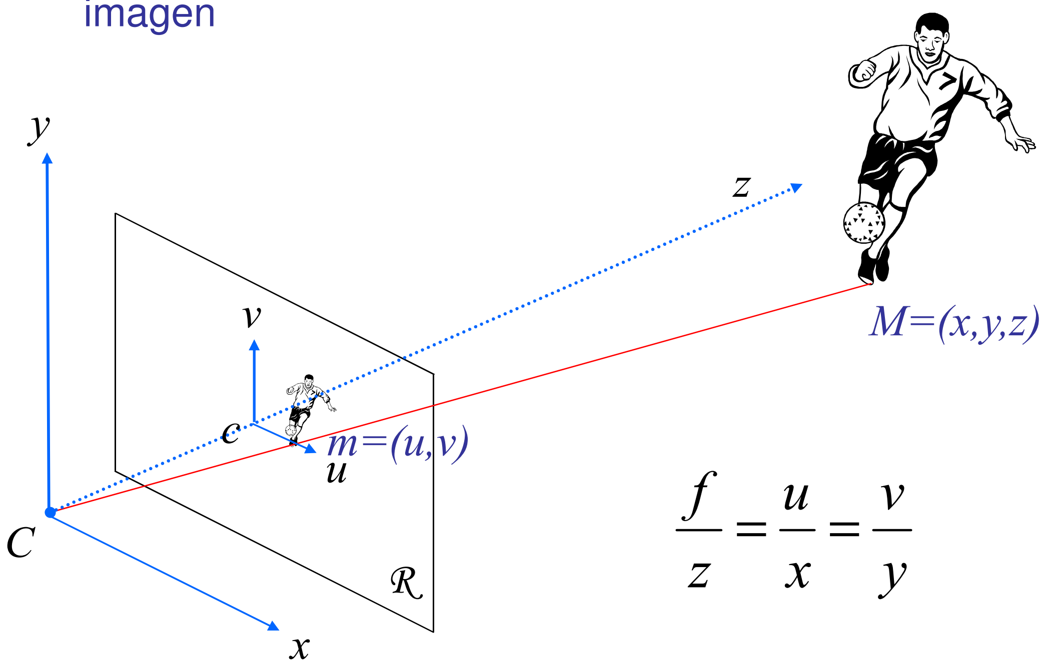
Sist. Coord. 3D = $(C, x, y, z)$
$C$ = centro óptico
$z$ = eje óptico




Sist. Coord. 2D = $(c, u, v)$
$u$ paralelo $x$
$v$ paralelo $y$
$c$ = intersección $\mathcal{R}$ y $z$

## Geometría de la proyección

- De coordenadas de la cámara a coordenadas de la imagen




$$\frac{f}{z} = \frac{u}{x} = \frac{v}{y}$$



## Geometría de la proyección

- Matriz de proyección perspectiva

$$\frac{f}{z} = \frac{u}{x} = \frac{v}{y}$$

2D: $u$, $v$ — 3D: $z$, $x$, $y$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \\ S \end{bmatrix}}_{2D} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}}_{3D}$$

$$u = U / S \quad v = V / S \quad si\ S \neq 0$$

Factor de escala S=z

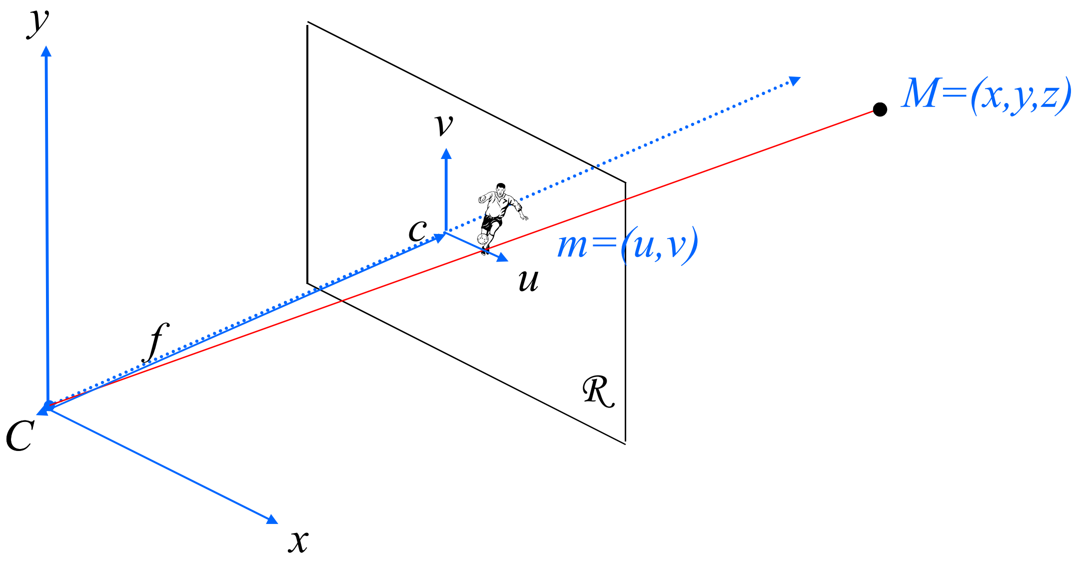
Coordenadas homogeneas

$P$ = matriz de proyección

$$\tilde{m} = P\tilde{M}$$

# Geometría de la proyección

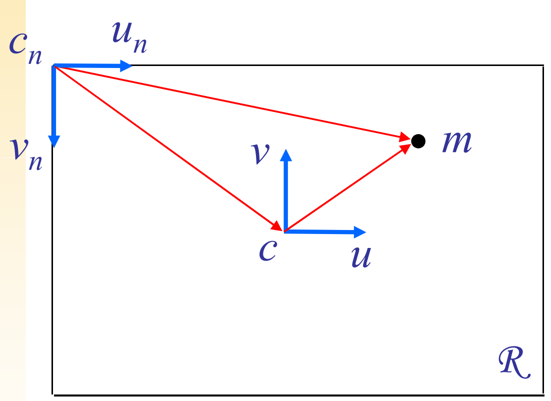
- Lo que queremos es $m$ en coordenadas normalizadas






# Geometría de la proyección

- De coordenadas de la imagen a coordenadas normalizadas (origen y unidades en píxeles)




Coordenadas normalizadas de la imagen

Cambio de coordenadas de $(c, u, v)$ a $(c_n, u_n, v_n)$

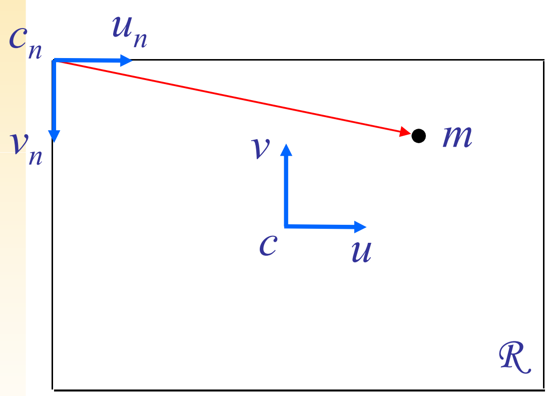
$$\overline{c_n m} = \overline{c_n c} + \overline{cm}$$

Sumar a m la posición de $c$ respecto a $c_n$ :

$(u_0, v_0)$

# Geometría de la proyección

- De coordenadas de la imagen a coordenadas normalizadas




Unidades de $u$, $v$ ⇒ *metros*
Unidades de $u_n$, $v_n$ ⇒ *pixels*

$k_u$, $k_v$ pixels/metro

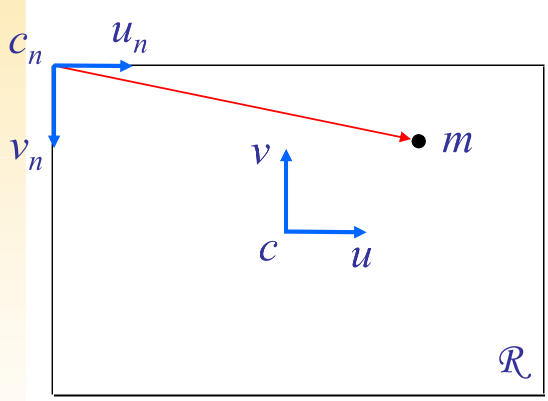
Puede ser $k_u \neq k_v$

Coordenadas normalizadas de la imagen



# Geometría de la proyección

- De coordenadas de la imagen a coordenadas normalizadas




Cambio origen coordenadas

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_u & 0 & u_0 \\ 0 & k_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas normalizadas de la imagen

## Geometría de la proyección

- Matriz de proyección perspectiva

$$S\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fk_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & fk_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_n = U / S \quad v_n = V / S \quad si\ S \neq 0$$

Parámetros intrínsecos: $f,\ k_u,\ k_v,\ u_0,\ v_0$



## Geometría de la proyección

- Matriz de proyección perspectiva

$$S\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \alpha_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_n = U / S \quad v_n = V / S \quad si\ S \neq 0$$

Medida de la longitud focal en unidades de $u_n$ y $v_n$: $\alpha_u,\ \alpha_v$

## Geometría de la proyección

- Matriz de proyección perspectiva

$$S\begin{bmatrix}u_n\\ v_n\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U\\ V\\ S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_u & -\alpha_u\cot\theta & u_0 & 0\\ 0 & \alpha_v/\sin\theta & v_0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{bmatrix}$$

11 grados de libertad

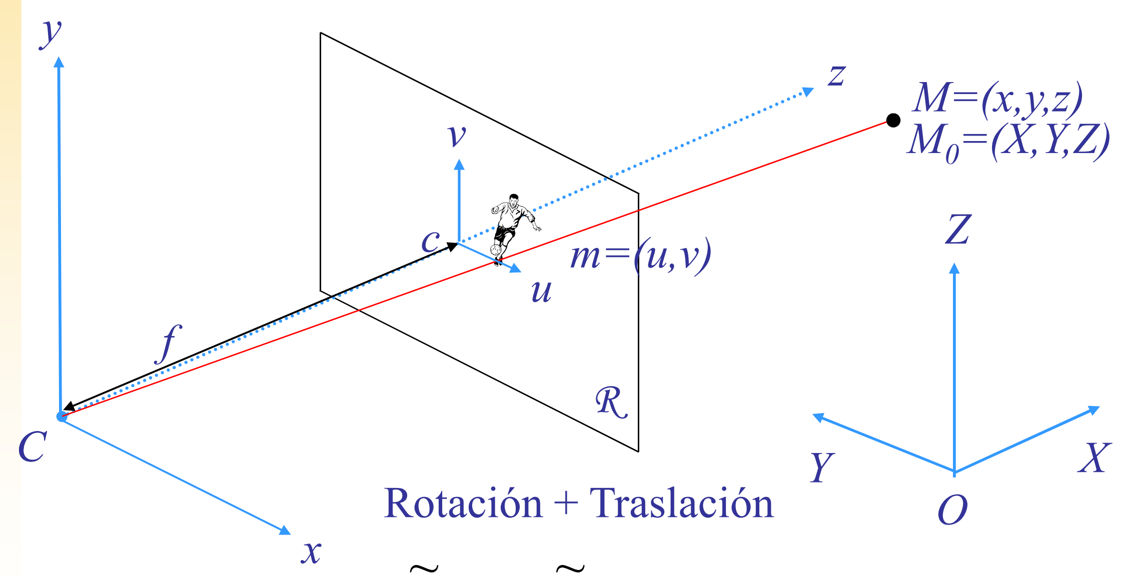
$$u_n = U/S \quad v_n = V/S \quad si\ S\neq 0$$

Cuando es posible que haya una desviación del eje óptico



## Geometría de la proyección

- Parámetros extrínsecos: de las coordenadas del mundo a las coordenadas de la cámara




Rotación + Traslación

$$\tilde{M} = K\tilde{M}_o$$

## Geometría de la proyección

- Parámetros extrínsecos

Rotación + Traslación

$$\tilde{M} = K\tilde{M}_o$$

Rotación + Traslación

$$K = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}$$



## Geometría de la proyección

- Forma general de la matriz de proyección

$$S\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ S \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_n = U/S \quad v_n = V/S \quad si\ S \neq 0$$

## Geometría de la proyección

- Forma general de la matriz de proyección

$$P = \begin{bmatrix} fk_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & fk_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Parámetros intrínsecos

Matriz 3x4

Parámetros extrínsecos



## Geometría de la proyección

- Calibración:
  - Paso 1: Estimar la matriz $\boldsymbol{P}$
  - Paso 2: Estimar los parámetros intrínsecos y extrínsecos a partir de $\boldsymbol{P}$
- Para algunas aplicaciones (como **visión estéreo**) sólo es necesario el paso 1.

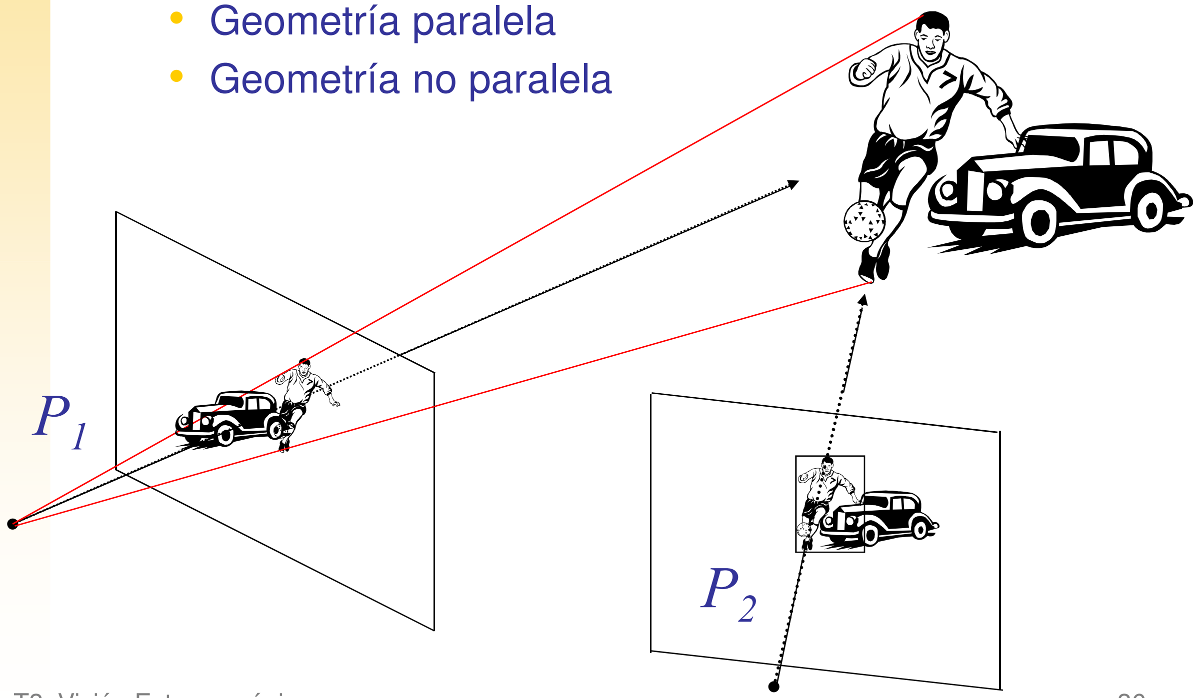
## Índice

- Introducción
  - ¿Qué es la visión estereoscópica?
- Geometría de un sistema binocular
  - Geometría de la proyección
  - ✓ Geometría binocular. Matriz fundamental
  - Rectificación
- El problema de la correspondencia
  - Restricciones
  - Métodos de correspondencia
    - Métodos basados en áreas
    - Métodos basados en primitivas
  - Mapa de disparidades, oclusiones, consistencia



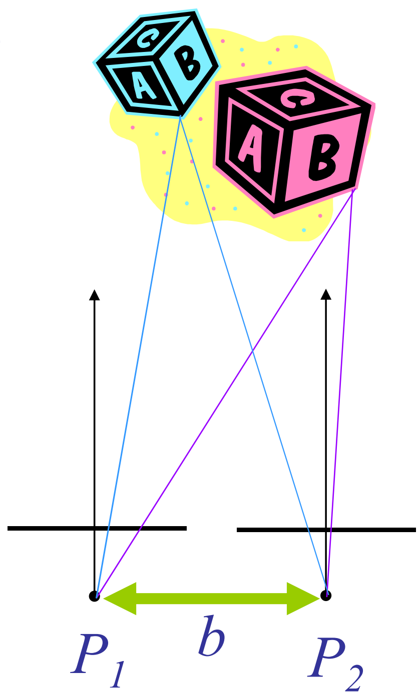
## Geometría de un Sistema Binocular

- Geometría de 2 cámaras:
  - Geometría paralela
  - Geometría no paralela



# Geometría de un Sistema Binocular

- El caso más simple:
  - Geometría paralela






# Geometría de un Sistema Binocular

- El caso más simple:
  - Geometría paralela

$$P_1 = \begin{bmatrix} fk_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & fk_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cambio a sistema de coordenadas en cámara 1

$$P_2 = \begin{bmatrix} fk_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & fk_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Geometría de un Sistema Binocular

- El caso más simple:
  - Geometría paralela

$$P_1 = \begin{bmatrix} fk_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & fk_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

!Iguales!

$$P_2 = \begin{bmatrix} fk_u & 0 & u_0 & fk_u b \\ 0 & fk_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



## Geometría de un Sistema Binocular

- El caso más simple:
  - Geometría paralela

$$\tilde{m}_1 = P_1 \tilde{M}, \quad m_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{v_1 = v_2}$$

$$\tilde{m}_2 = P_2 \tilde{M}, \quad m_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

UNIVERSITAT JAUME•I

## Geometría de un Sistema Binocular

- El caso más simple:
  - Geometría paralela

$$u_1 = fk_u \frac{x}{z} + u_0$$

$$u_2 = fk_u \frac{x}{z} + u_0 + fk_u \frac{b}{z}$$

$$\boxed{u_2 = u_1 + fk_u \frac{b}{z}}$$



UNIVERSITAT JAUME•I

## Geometría de un Sistema Binocular

- El caso más simple:
  - Geometría paralela

constante

$$u_2 - u_1 = \frac{fk_u b}{z} \Leftarrow \boxed{u_2 = u_1 + fk_u \frac{b}{z}}$$

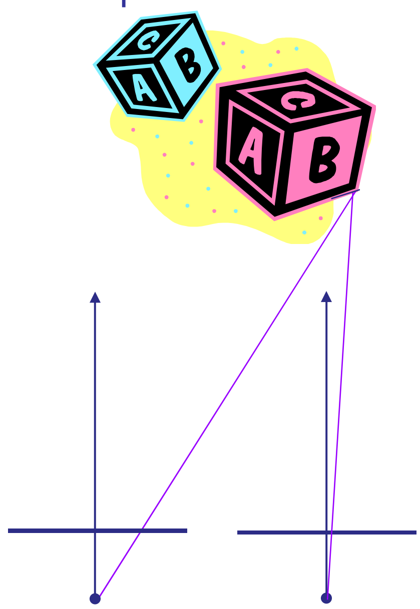
disparidad

profundidad

Inversamente proporcional

## Geometría de un Sistema Binocular

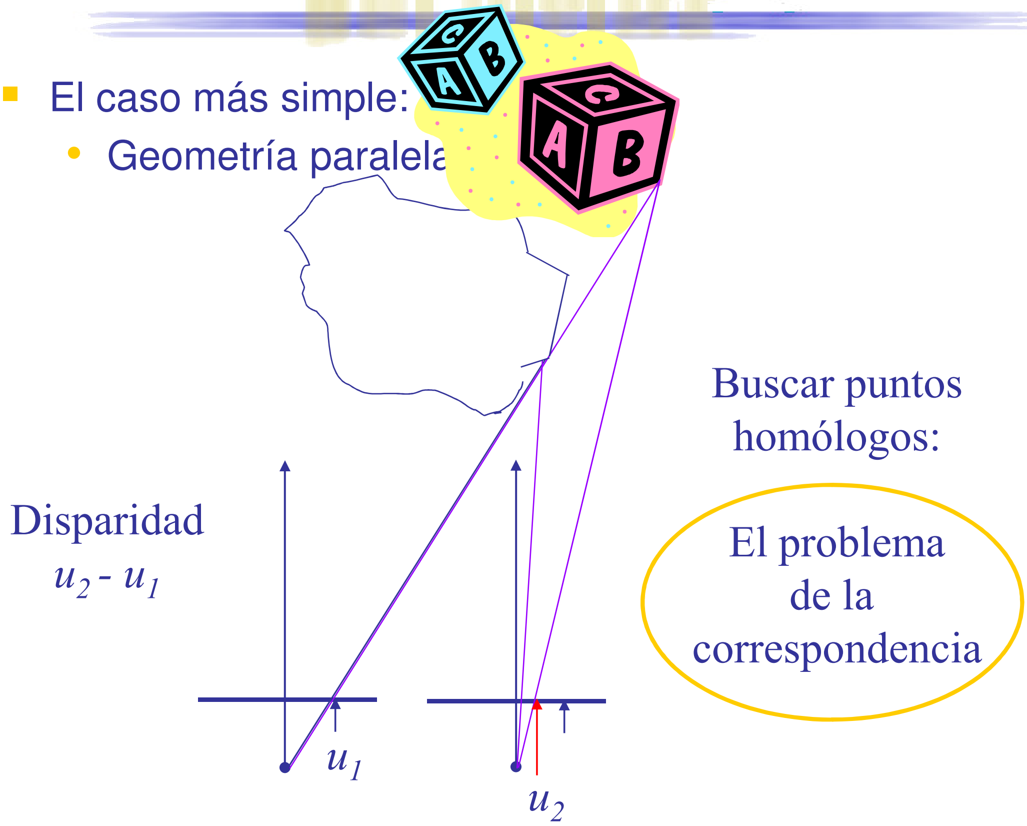
- El caso más simple:
  - Geometría paralela





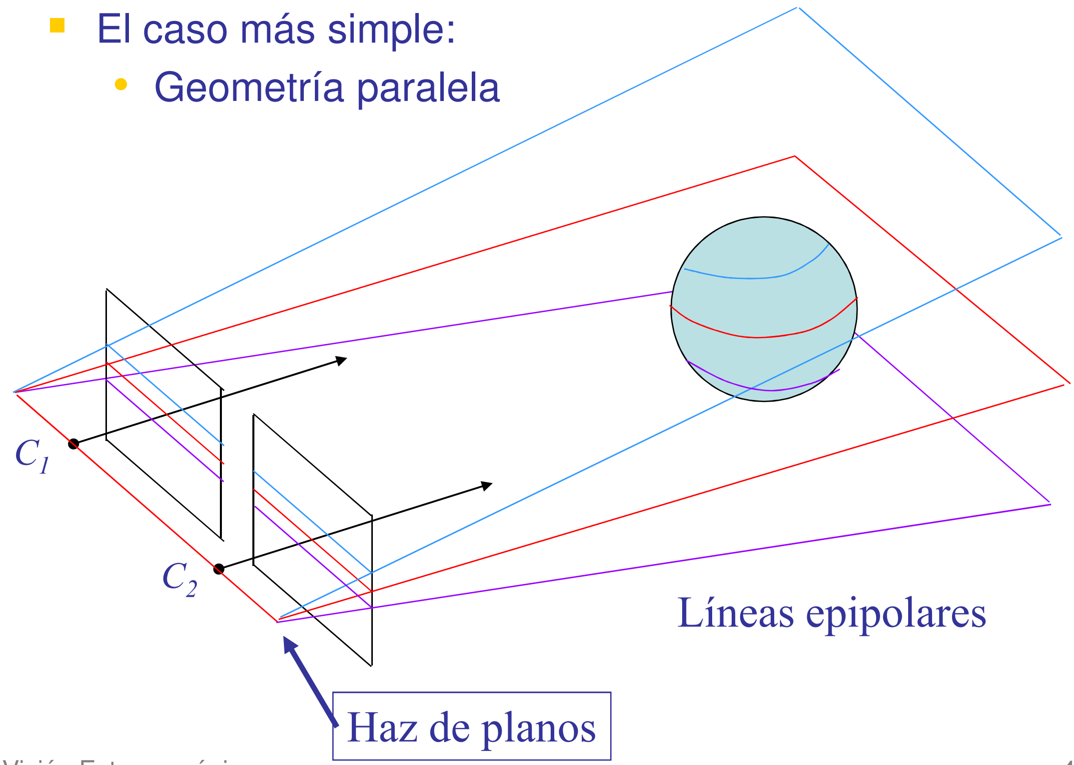
## Geometría de un Sistema Binocular

- El caso más simple:
  - Geometría paralela



## Geometría de un Sistema Binocular

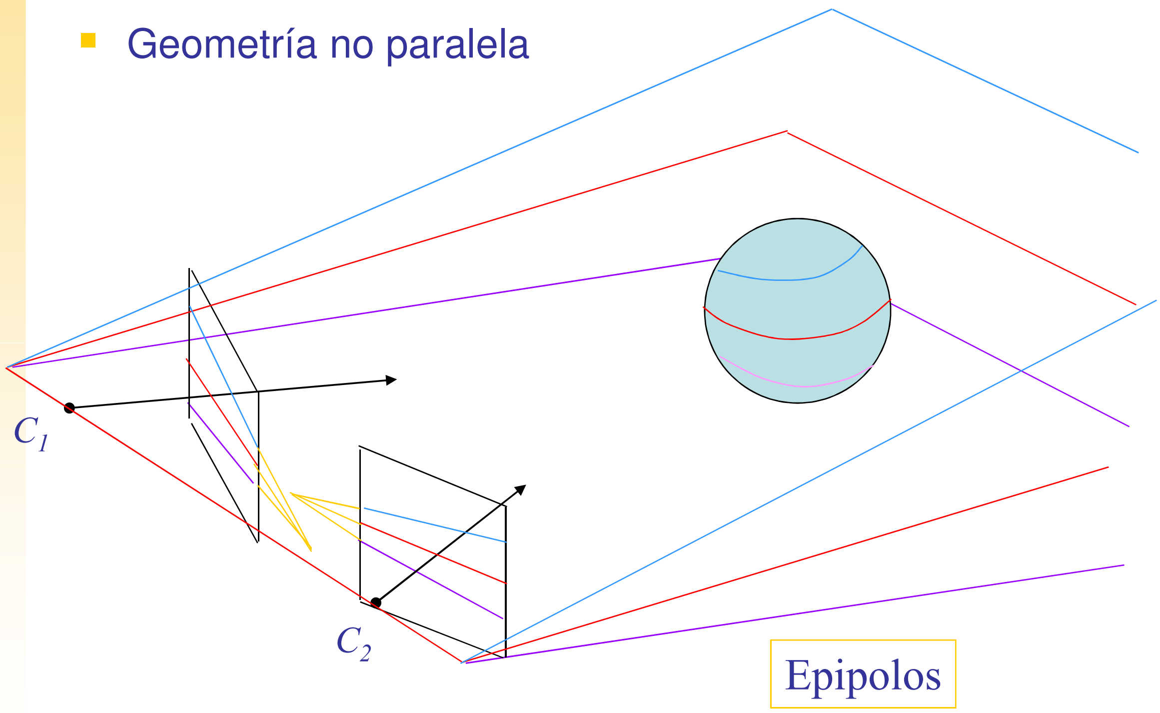
- El caso más simple:
  - Geometría paralela






## Geometría de un Sistema Binocular

- Geometría no paralela



# Geometría de un Sistema Binocular

- Geometría no paralela

$$P_1 = \begin{bmatrix} fk_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & fk_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Suponemos:

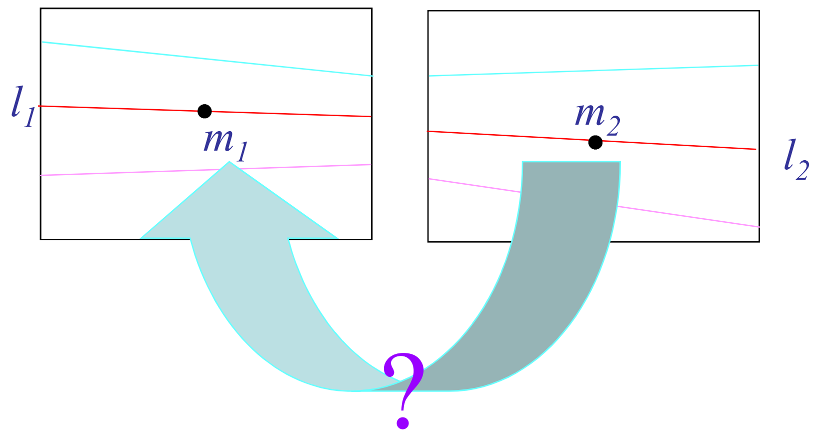
- Coord. del mundo en $(C_1, x_1, y_1, z_1)$
- Misma cámara

$$P_2 = \begin{bmatrix} fk_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & fk_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Geometría de un Sistema Binocular

- Matriz Fundamental




$l=(a,b,c)$

Matriz 3x3

*F*= Matriz Fundamental

$$F^{-1} = F^T$$

$$F\tilde{m}_1 = l_2 \qquad \tilde{m}_2^{\,T} F\tilde{m}_1 = 0 \quad (F\tilde{m}_1 = l_2)$$

$$F^T\tilde{m}_2 = l_1 \qquad \tilde{m}_1^{\,T} F^T\tilde{m}_2 = 0 \quad (F^T\tilde{m}_2 = l_1)$$

Coordenadas homogeneas

# Geometría de un Sistema Binocular

- Calibración:
  - Obtener todos los parámetros de calibración (matrices de proyección $\boldsymbol{P_1}$ y $\boldsymbol{P_2}$)

$$s_1\tilde{m}_1 = P_1\tilde{M} \qquad \boldsymbol{s_1, s_2} : \text{factores de escala}$$
$$s_2\tilde{m}_2 = P_2\tilde{M}$$

  - Calcular $\boldsymbol{F}$ a partir de $\boldsymbol{P_1}$ y $\boldsymbol{P_2}$

$$F = \left[q_2 - Q_2 Q_1^{-1} q_1\right]_\times Q_2 Q_1^{-1}$$

donde $\boldsymbol{Q_i}$ son matrices 3x3 y $\boldsymbol{q_i}$ son vectores 3x1,

$$P_i = [\underbrace{Q_i}_{\text{Matriz 3x3}} \quad \underbrace{q_i}_{\text{Matriz 3x1}}]$$

Factorización



# Geometría de un Sistema Binocular

- Calibración **débil**:
  - Hallar pares de puntos homólogos en dos imágenes
  - Estimar la matriz $F$ a partir de los pares de correspondencias
    - Método de los 8-puntos
    - Métodos lineales
    - Métodos no lineales

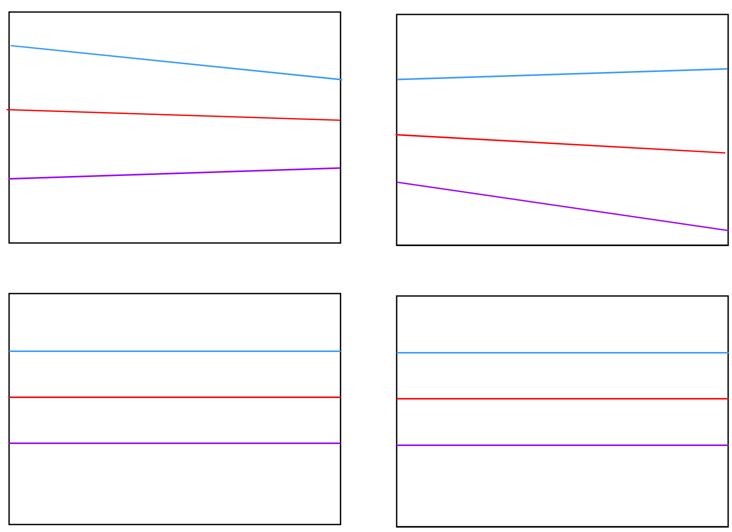
# Índice

- Introducción
  - ¿Qué es la visión estereoscópica?
- Geometría de un sistema binocular
  - Geometría de la proyección
  - Geometría binocular. Matriz fundamental
  - ✓ Rectificación
- El problema de la correspondencia
  - Restricciones
  - Métodos de correspondencia
    - Métodos basados en áreas
    - Métodos basados en primitivas
  - Mapa de disparidades, oclusiones, consistencia



# Geometría de un Sistema Binocular

- Rectificación:
  - Hacer coincidir las líneas epipolares con filas de la imagen



## Geometría de un Sistema Binocular

- Rectificación:
  - Si las cámaras son en perspectiva lineales
    - Rectificar = proyectar $P_1$ y $P_2$ en un plano de rectificación
  - Si son en perspectiva no lineal
    - Hay que tener en cuenta la distorsión
  - Si no son en perspectiva
    - Métodos muy diferentes



## Geometría de un Sistema Binocular

- Rectificación:
  - Si las cámaras son en perspectiva lineales
    - Rectificar = proyectar $P_1$ y $P_2$ en un plano de rectificación
    - Los epipolos son enviados al infinito
    - $F$ rectificada es:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Geometría de un Sistema Binocular

- Rectificación:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F\tilde{m}_1 = l_2$$

$$F\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = l_2$$

$$l_2\tilde{m}_2 = 0$$

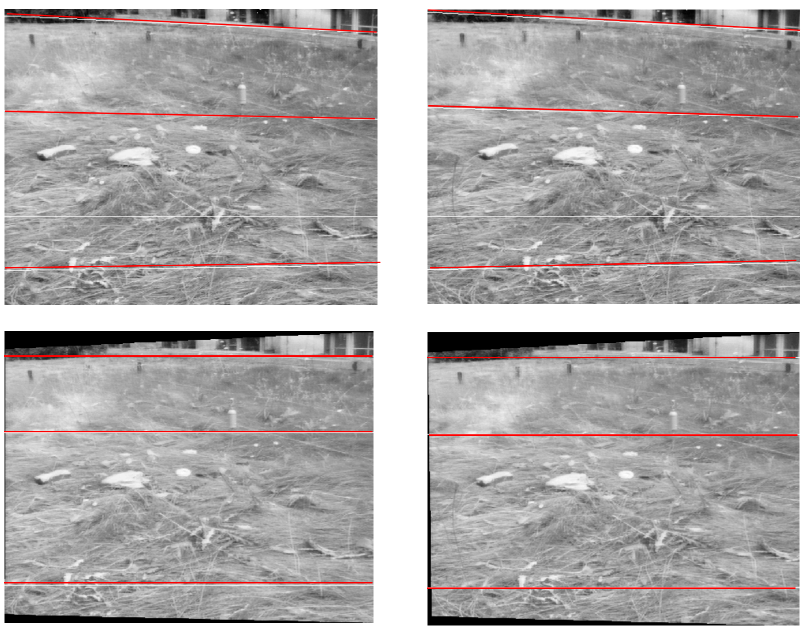
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & v_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix} = -v_2 + v_1 = 0$$

$$v_1 = v_2$$



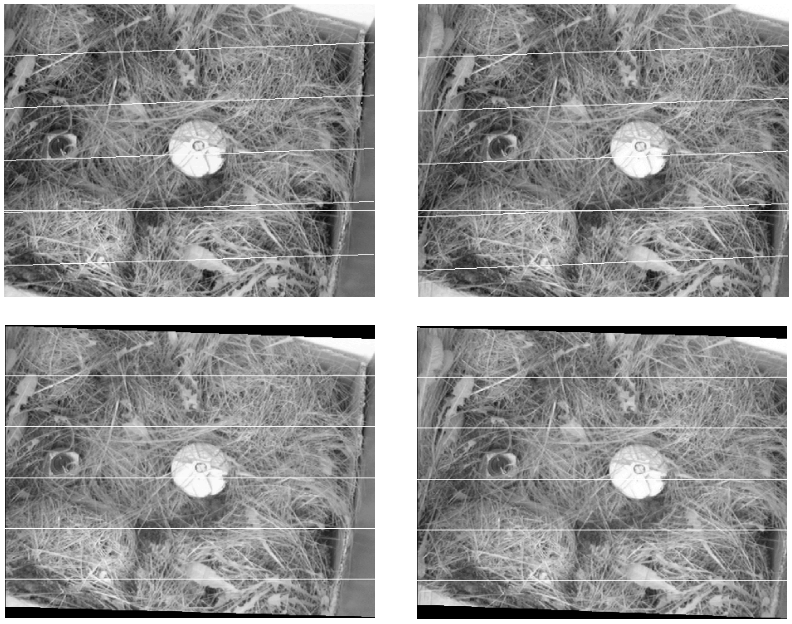
## Geometría de un Sistema Binocular

- Rectificación:



# Geometría de un Sistema Binocular

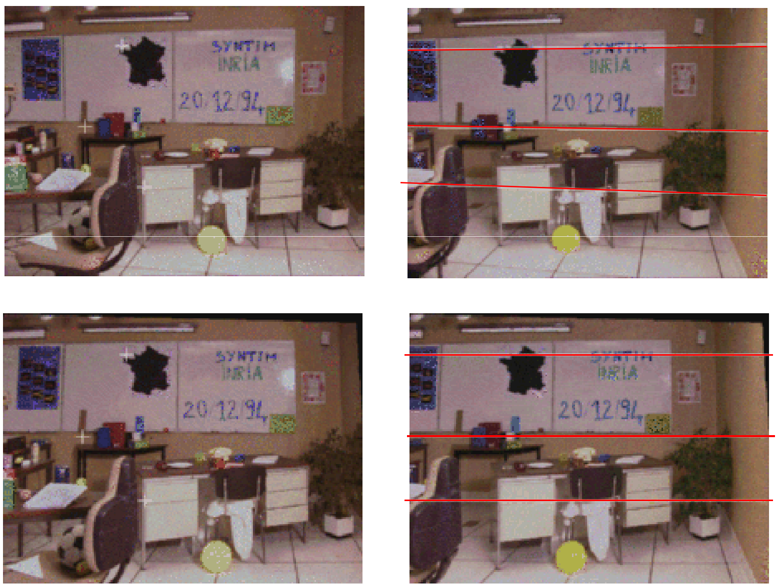
- Rectificación:





# Geometría de un Sistema Binocular

- Rectificación:



## Geometría de un Sistema Binocular

- Rectificación: comparación de método lineal y no lineal



## Bibliografía


- Faugeras, O.; *Three-Dimensional Computer Vision. A Geometric Approach*. MIT Press, 1993
- Hartley, R. and Zisserman, A.; *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, 2000